Polar Coordinates and Conic Section
極座標與圓錐曲線

§10-1

直線 $ax+by=c$

$y=ax+b$

圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$x^2+y^2=r^2$

曲線 錐體 拋物線 $y^2=kx$

橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

雙曲線 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

§10-2 Polar Coordinates（極座標）

Radial coordinate
Angular coordinate

$(x,y)\to(r,\theta)$

$x=r\cos\theta$
$y=r\sin\theta$

$r^2=x^2+y^2$

$\tan\theta=\frac{y}{x}$ if $x\neq 0$

<例題>：圓心在原點，半徑為 a 的圓。

$r=a$

【補圖】

<例題>：$r=2\sin\theta$

【補圖】

<例題>：cardioid 心臟形曲線

$r = a(1 \pm \sin\theta)$
$r = a(1 \pm \cos\theta)$

【補圖】

<例題>： $r = 2\cos 2\theta$

【補圖】

<例題>： $r^2 = -4\sin 2\theta$

【補圖】

作圖方法：1）先找對稱軸

x 軸　$f(r,\theta) = f(r,-\theta)$

y 軸　$f(r,\theta) = f(r,\pi-\theta)$

原點　$f(r,\theta) = f(-r,\theta)$

（若其中兩項符合，則第三項亦會符合。）

2） $r = 0$時，求$\theta = ?$

3）找特殊點，代入座標圖中。

§10-3 面積

【再補】

---

§10-4 Parabola（拋物線）

The Parabola

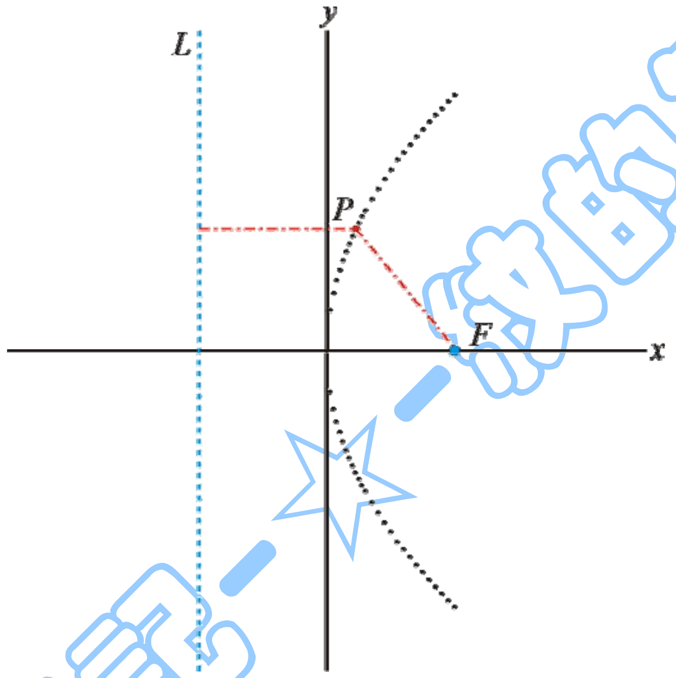
A parabola is the set of all points P in the plane that are equidistant from a fixed point F (call the focus of the parabola) and from a fixed line L (call the parabola's directrix) not containing F.

拋物線是平面內到一定點和到一條不過此點的定直線的距離相等的點的軌跡。這一定點叫做拋物線的**焦點**，定直線叫做拋物線的**準線**。

xy 平面上有一個點 $F(c_1, c_2)$，和一條直線 $L(ax+by+c)$。一條曲線在點 F 和直線 L 中間，與兩者間距離相等。此曲線稱爲拋物線。

拋物線上任意一點 $P(x,y)$ 至準線 $L(ax+by+c)$ 之距離與 $P(x,y)$ 至焦點 $F(c_1, c_2)$ 的距離相等

因此 $\sqrt{(x-c_1)^2+(y-c_2)^2} = \frac{ax+by+c}{\sqrt{a^2+b^2}}$



$y^2 = 4px$

$(y-k)^2 = 4p(x-h)$

§10-5 The Ellipse（橢圓）

The Ellipse

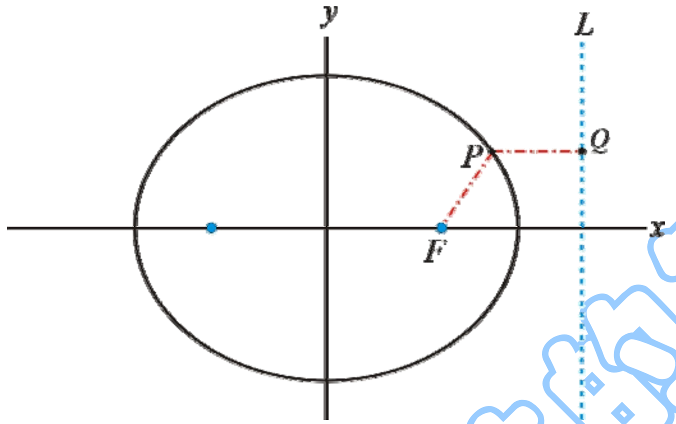
Support that $e<1$, and let F be a fixed point and L a fixed line not containing F. The ellipse with eccentricity e, focus F. and directrix L is the set of all points P such that the distance $|PF|$ is e times the (perpendicular) distance from P to the line L.

橢圓是平面上到兩個固定點的距離之和是常數的軌跡。這兩個固定點叫做**焦點**。

如何畫出一個橢圓：準備一條線，將這條線的兩端各綁在一點上（這兩個點就當作是橢圓的

兩個焦點)；再取一支筆，將線綳緊，這時候兩個點和筆就形成了一個三角形；然後拉著線開始作圖，持續的使線綳緊，最後就可以完成一個橢圓的圖形了。

一固定點 $F(c,0)$，L 爲一垂直線 $x=\frac{c}{e^2}$。在這個例子中，$c>0$。如果 $Q(\frac{c}{e^2},y)$ 在 L 上，PQ 是 $P(x,y)$ 點垂直到 L 的直線。



條件：$|PF|=e|PQ|$

可以得到 $(x-c)^2+y^2=e^2(x-\frac{c}{e^2})^2$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=e^2x^2-2cx+\frac{c^2}{e^2}$$

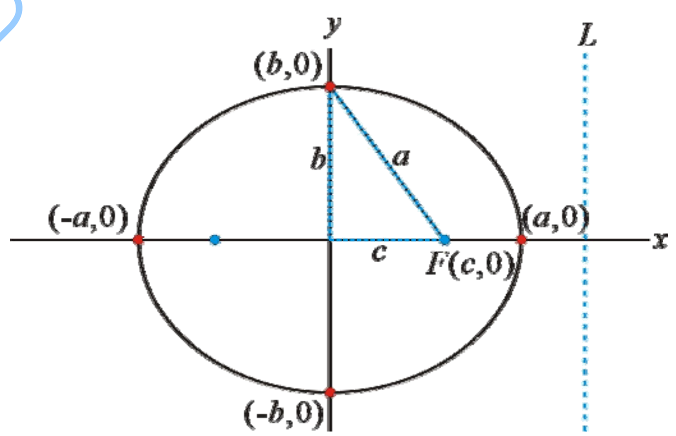
$$x^2(1-e^2)+y^2=c^2(\frac{1}{e^2}-1)=\frac{c^2}{e^2}(1-e^2)$$

($a=\frac{c}{e}$)

$$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



$$a^2=b^2+c^2$$

§10-6 The Hyperbola（雙曲線）

> The Hyperbola
>
> Support that $e>1$, and let F be a fixed point and L a fixed line not containing F. Then the hyperbola with eccentricity e, focus F. and directrix L is the set of all points P such that the distance $|PF|$ is e times the (perpendicular) distance from P to the line L.
>
> 與兩個固定的點（叫做焦點）的距離差是常數的點的軌跡。這個固定的距離差是 a 的兩倍，這裡的 a 是從雙曲線的中心到雙曲線最近的分支的頂點的距離。a 還叫做雙曲線的半實軸。焦點位於貫穿軸上它們的中間點叫做中心。

一固定點 $F(c,0)$，L 爲一垂直線 $x=\frac{c}{e^2}$。在這個例子中，$c>0$。如果 $Q(\frac{c}{e^2},y)$ 在 L 上，PQ 是 $P(x,y)$ 點垂直到 L 的直線。

【補圖】

條件：$|PF|=e|PQ|$

可以得到 $(x-c)^2+y^2=e^2(x-\frac{c}{e^2})^2$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=e^2x^2-2cx+\frac{c^2}{e^2}$$

$$x^2(e^2-1)-y^2=c^2(1-\frac{1}{e^2})=\frac{c^2}{e^2}(e^2-1)$$

（$a=\frac{c}{e}$）

$$x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$b^2=a^2(1-e^2)=c^2-a^2$$